EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

39e JAARGANG 1963/1964

III — 1 NOVEMBER 1963

INHOUD

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt *f* 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij dienen *f* 5,00 te storten op postrekening 614418 t.n.v. penningmeester Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, de Houtmanstraat 37 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. Dr. O. BOTTEMA
Delft

LIV. *De beweging van een punt over het aardoppervlak.*

De beweging van een stoffelijk punt P met massa 1 over het oppervlak van de bolvormig gedachte, met constante hoeksnelheid ω om een vaste as roterende aarde, is een vraagstuk uit het hoofdstuk der relatieve beweging. De mechanica leert dat men voor de beweging ten opzichte van de aarde de veronderstelling mag maken dat de aarde stil staat, mits men als tegenprestatie aan de gewone

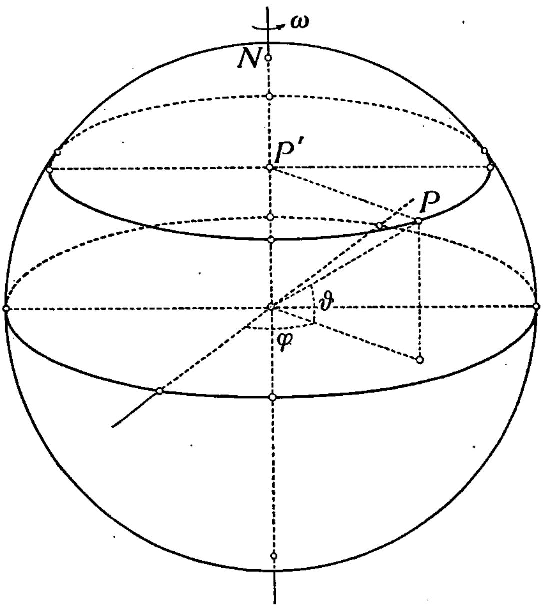


Fig. 1.

krachten die op P werken nog twee *schijnkrachten* toevoegt: de middelpuntvliedende kracht K_1 en de Coriolis-kracht K_2. Wij nemen aan dat P de aarde niet verlaat en kunnen ons dus beperken tot de tangentiële componenten der op P werkende krachten. Het gebruik der geografie volgend bepalen wij de plaats van P op de aarde door de breedte ϑ en de lengte φ (fig. 1). De straal van de aarde nemen wij gelijk aan 1. Is P op het noordelijk halfrond,

P' zijn projectie op de as dan valt K_1 langs $P'P$ en zij is groot $\omega^2 \cos \vartheta$; de tangentiële component is $K_1' = \omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta$ en naar het zuiden gericht. De kracht K_2 is afhankelijk van de (relatieve) snelheid v van P. Haar tangentiële component K_2' is groot $2\,\omega v \sin \vartheta$, haar richting staat loodrecht op die van v en zij wijst, in de richting van v ziende, naar rechts. Op het zuidelijk halfrond geldt eigenlijk hetzelfde, maar omdat ϑ dan negatief is wijst K_1' nu naar het noorden en K_2' naar links. Daar ω klein is (2π radialen per etmaal) is K_2 de belangrijkste van de beide schijnkrachten; zij verricht geen arbeid daar zij loodrecht op de bewegingsrichting staat, wijzigt dus niet de grootte van de snelheid, maar wel de richting. Zij is verantwoordelijk voor de wet van Buys-Ballot en voor het gedrag van de slinger van Foucault (in de nieuwste uitvoering, gebaseerd op de beginselen der industriële vormgeving, geplaatst in het gebouw der Verenigde Naties, als geschenk van het Land van *Christiaan Huygens*).

Wij stellen de academische vraag naar de beweging van P als het zich vrij van enige werkelijke kracht, en dus met name van elke wrijving, over het aardoppervlak verplaatsen kan.

In het licht van het voorgaande zou men de beweging van P kunnen nagaan onder invloed van de krachten K_1' en K_2'. Maar al deze beschouwingen zijn overbodig als men bedenkt dat de *absolute* beweging van P, dat immers geen andere kracht ondervindt dan een radiale, een eenparige beweging moet zijn langs een vaste grote cirkel c op een met de aarde samenvallende, stilstaande bol. Elke interactie tussen P en de aarde is immers afwezig verondersteld en de aarde draait dan ook zonder snelheidsverandering onder het punt door. Uit deze sleepbeweging en de absolute beweging van P moet nu de gevraagde relatieve beweging kunnen worden afgeleid.

Wij veronderstellen daartoe dat het vlak van de absolute baan c van P de hoek $\alpha (0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2})$ maakt met het equatorvlak. Gemakshalve laten wij de grensgevallen $\alpha = 0$ en $\alpha = \frac{\pi}{2}$ voorlopig buiten beschouwing. Met ω_1, duiden wij de hoeksnelheid van P langs c aan, positief genomen als van de noordpool uit gezien de draaiïng in tegenwijzerrichting geschiedt.

Wij kiezen een vast rechthoekig assenstelsel $OXYZ$, O in het middelpunt van de aarde, OZ langs de rotatie-as, OY langs de equatoriale doorgang van het vlak van c (fig. 2). Op het tijdstip $t = 0$ zij P in het hoogste punt van zijn baan. Hieruit volgt voor de absolute coördinaten van P:

$$X = \cos \alpha \cos \omega_1 t,\ Y = \sin \omega_1 t,\ Z = \sin \alpha \cos \omega_1 t \qquad (1)$$

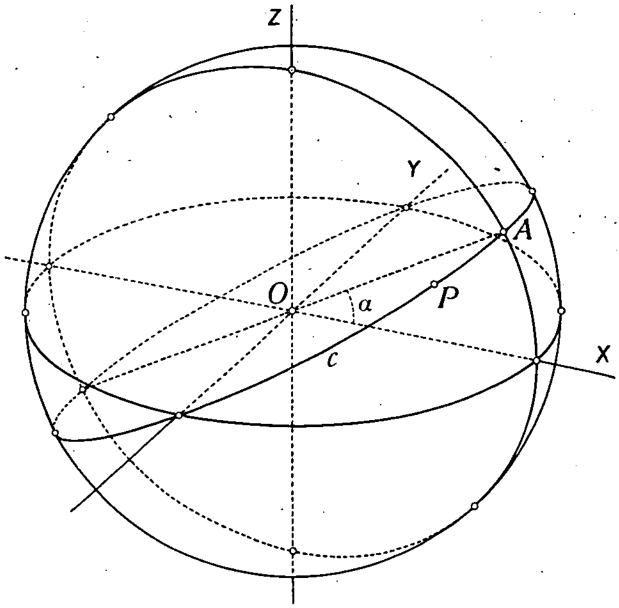


Fig. 2.

Een tweede rechthoekig assenstelsel $Oxyz$ verbinden wij aan de aarde, Oz valt met OZ samen, OX ligt in het vlak van de nulmeridiaan. Dan bestaan wegens de aardrotatie de volgende betrekkingen.

$$\begin{aligned} X &= x \cos \omega t - y \sin \omega t, \quad Z = z \\ Y &= x \sin \omega t + y \cos \omega t, \end{aligned} \tag{2}$$

Uit (1) en (2) vinden wij door eliminatie van X, Y en Z de coördinaten x, y en z als functies van t, waardoor de gevraagde relatieve beweging bepaald is:

$$\begin{aligned} x &= \cos\alpha \cos \omega_1 t \cos \omega t + \sin \omega_1 t \sin \omega t \\ y &= -\cos\alpha \cos \omega_1 t \sin \omega t + \sin \omega_1 t \cos \omega t \\ z &= \sin\alpha \cos \omega_1 t \end{aligned} \tag{3}$$

Alvorens deze vergelijkingen en in het bijzonder de baan van P nader te discussiëren trekken wij uit (3) nog een aantal conclusies. Na enige herleiding kan men ook schrijven:

$$\begin{aligned} x &= \cos^2\frac{\alpha}{2} \cos(\omega_1 - \omega)t - \sin^2\frac{\alpha}{2} \cos(\omega_1 + \omega)t \\ y &= \cos^2\frac{\alpha}{2} \sin(\omega_1 - \omega)t + \sin^2\frac{\alpha}{2} \sin(\omega_1 + \omega)t \\ z &= \sin\alpha \cos \omega_1 t \end{aligned} \tag{4}$$

Uit deze vergelijkingen volgt dat de projectie P'' van P op het equatorvlak een *cycloïde* beschrijft. Uit de vergelijkingen voor

x en y volgt nl. dat deze baan dezelfde is als die van een punt dat een cirkel C met straal $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ eenparig met de hoeksnelheid $\omega_1 + \omega$ in wijzerrichting doorloopt terwijl tevens het middelpunt van C een cirkel C_0 met straal $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$ in tegenwijzerrichting met de constante hoeksnelheid $\omega_1 - \omega$ doorloopt. De baan van P op het aardoppervlak is de doorsnede van de bol met een cycloïdale cilinder. In het bijzonder volgt hieruit dat de baan een gesloten (algebraïsche) kromme is als de verhouding van ω_1 en ω meetbaar is.

Voorts volgt uit (3) voor de snelheidscomponenten in x, y en z richting

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\omega - \omega_1 \cos\alpha) \sin\omega_1 t \cos\omega t + (\omega_1 - \omega\cos\alpha)\cos\omega_1 t \sin\omega t \\ \dot{y} &= -(\omega - \omega_1\cos\alpha)\sin\omega_1 t \sin\omega t + (\omega_1 - \omega\cos\alpha)\cos\omega_1 t \cos\omega t \\ \dot{z} &= -\omega_1 \sin\alpha \sin\omega_1 t \end{aligned} \tag{5}$$

Voor de totale snelheid v krijgen wij dus

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = (\omega_1 - \omega\cos\alpha)^2 + \omega^2 \sin^2\alpha \sin^2\omega_1 t \tag{6}$$

De geografische coördinaten ϑ en φ van P volgen uit (3). Men heeft $\sin\vartheta = \sin\alpha\cos\omega_1 t$ en daaruit volgt $\cos\vartheta$ ondubbelzinnig omdat krachtens onze afspraken $\cos\vartheta > 0$ is:

$$\cos\vartheta = \sqrt{(1 - \sin^2\alpha\cos^2\omega_1 t)} \tag{7}$$

Voorts is $\cos\vartheta\,\dot{\vartheta} = -\omega_1 \sin\alpha \sin\omega_1 t$ en daarmee is $\dot{\vartheta} = v_N$, dat is de naar het noorden gerichte component van de snelheid, eveneens bepaald:

$$v_N = \frac{-\omega_1 \sin\alpha \sin\omega_1 t}{\cos\vartheta} \tag{8}$$

Uit $x = \cos\vartheta\cos\varphi$, $y = \cos\vartheta\sin\varphi$, $z = \sin\vartheta$ volgt zonder moeite $\dot{\varphi}\cos^2\vartheta = x\dot{y} - y\dot{x}$, waaruit met (3) en (5) $\dot{\varphi}$ als functie van t gevonden wordt en dus ook de snelheid in oostelijke richting v_0, die gelijk is aan $\cos\vartheta\,\dot{\varphi}$. Eenvoudiger gaat dit alles als men (fig. 2) de hoek ψ bepaalt waaronder de baan c van P de locale meridiaan snijdt. In de in A rechthoekige boldriehoek ZAP is $AZ = \frac{\pi}{2} - \alpha$ en $ZP = \frac{\pi}{2} - \vartheta$ waaruit volgt $\sin\psi = \frac{\cos\alpha}{\cos\vartheta}$. De component in oostelijke richting van de absolute snelheid ω_1 is dus $\omega_1 \sin\psi = \frac{\omega_1\cos\alpha}{\cos\vartheta}$ en daar de sleepsnelheid gelijk is aan $\omega\cos\vartheta$ vinden wij

$$v_0 = \frac{1}{\cos\vartheta}\{(\omega_1\cos\alpha - \omega) + \omega\sin^2\alpha\cos^2\omega_1 t\} \tag{9}$$

Na al deze voorbereidingen gaan wij nu de beweging van P nader volgen. Die in de noord-zuid richting is eenvoudig, daar zij onafhankelijk is van ω; althans voor $\omega_1 \neq 0$ slingert P heen en weer tussen de breedtecirkels $\vartheta = \alpha$ en $\vartheta = -\alpha$, en wel zo dat zijn projectie op de as een harmonische trilling uitvoert met de cirkelfrequentie ω_1. Voor $t = T = \frac{\pi}{2\omega_1}$ wordt de linie gepasseerd, voor $t = 2T$ de ondergrens van de zone bereikt en voor $t = 4T$ is P op de noorderbreedtecirkel terug en wel met dezelfde snelheid als voor $t = 0$. De baan die daarna volgt is congruent met het voorgaande traject. Bovendien zijn de banen op het noordelijk en het zuidelijk halfrond elkaars spiegelbeeld, terwijl zij beide een symmetrievlak hebben; alleen een periode zoals $0 \leqq t \leqq T$ is dus van wezenlijk belang.

Interessanter en gecompliceerder is de beweging in oost-west richting; de formule (9) neemt daarbij een sleutelpositie in. Uit (4) blijkt dat de baan van P alleen van de verhouding $k = \frac{\omega_1}{\omega}$ afhangt, immers als men $u = \omega t$ als parameter neemt, hangen de coördinaten alleen nog van α en k, af, die dus karakteristiek zijn voor de baan.

Wij merken nog op dat het snijpunt van de baan met de equator steeds een *buigpunt* van de baan is. Men kan dat uit de formules afleiden, maar het volgt onmiddellijk uit het feit dat voor $\vartheta = 0$ de schijnkrachten K_1' en K_2' beide nul zijn; P heeft daar dus de versnelling nul en in het bijzonder is de kromming nul. Door (6) wordt dit bevestigd, voor $t = T$ heeft v^2 haar maximale waarde, nl. $\omega^2 + \omega_1{}^2 - 2\omega\omega_1 \cos\alpha$. Zijn kleinste snelheid heeft P aan de breedtecirkels $\vartheta = \pm\, \alpha$; in beide gevallen is $v = \omega_1 - \omega \cos \alpha$. Wij onderscheiden nu verder verschillende gevallen door α constant te laten en k te laten afnemen van $+\infty$ tot $-+\infty$

a) $k > \dfrac{1}{\cos\alpha}$. Uit (9) volgt dat v_0 voor elke t positief is. Het punt P beweegt zich voortdurend in oostelijke richting. Het bereikt de equator ($t = T$) in het punt S_1 waarvan de geografische lengte φ_1, gelijk is aan $\left(\dfrac{\pi}{2} - \omega T\right) = \dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{k-1}{k}\right)$ zodat

$\dfrac{\pi}{2}(1 - \cos\alpha) < \varphi_1 < \dfrac{\pi}{2}$. De baan is in fig. 3a geschetst.

b) $k = \dfrac{1}{\cos\alpha}$. Nu is $v_0 = 0$ als P de equator passeert, maar overigens is v_0 positief. De baan snijdt de equator loodrecht in het punt S waarvoor $\varphi = \frac{\pi}{2}(1 - \cos\alpha)$; fig. 3b.

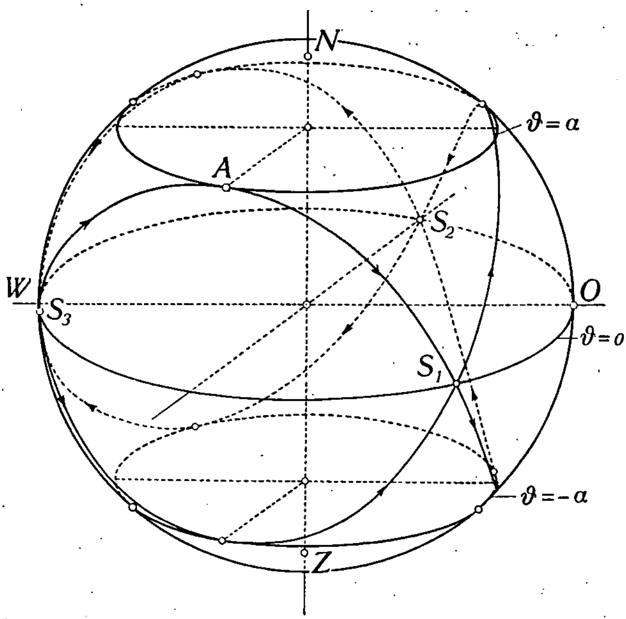


Fig. 3a.

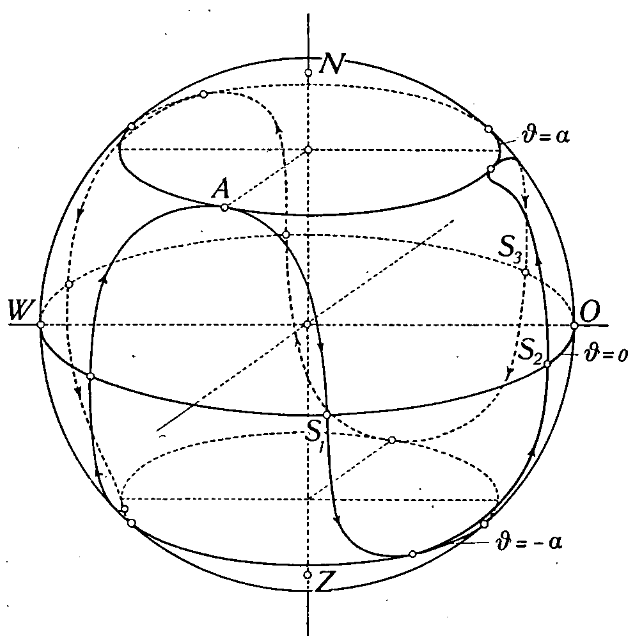


Fig. 3b.

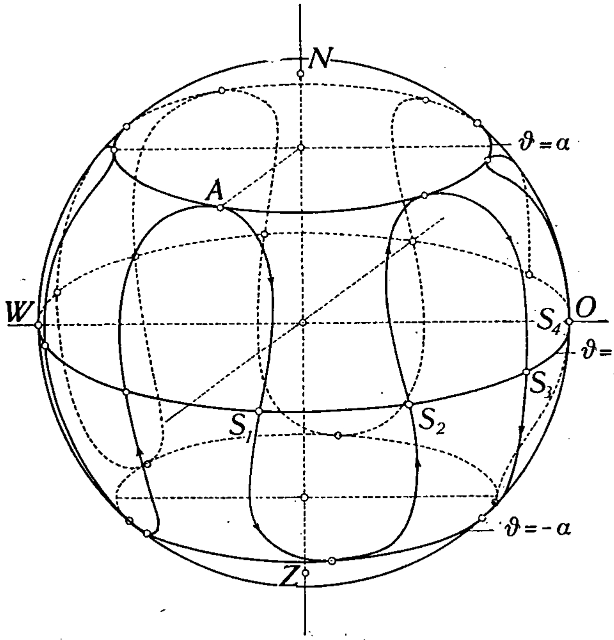


Fig. 3c.

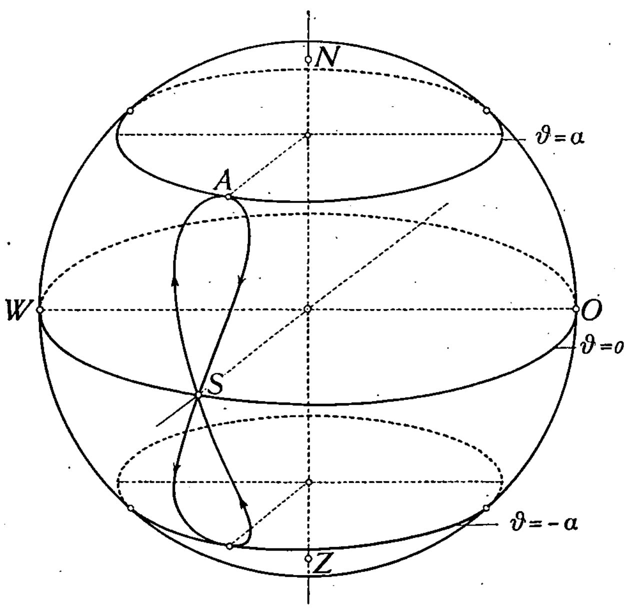


Fig. 3d.

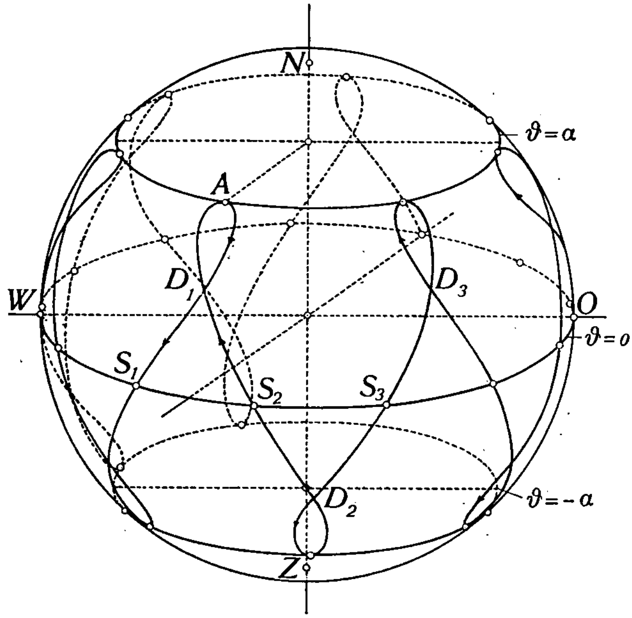


Fig. 3e.

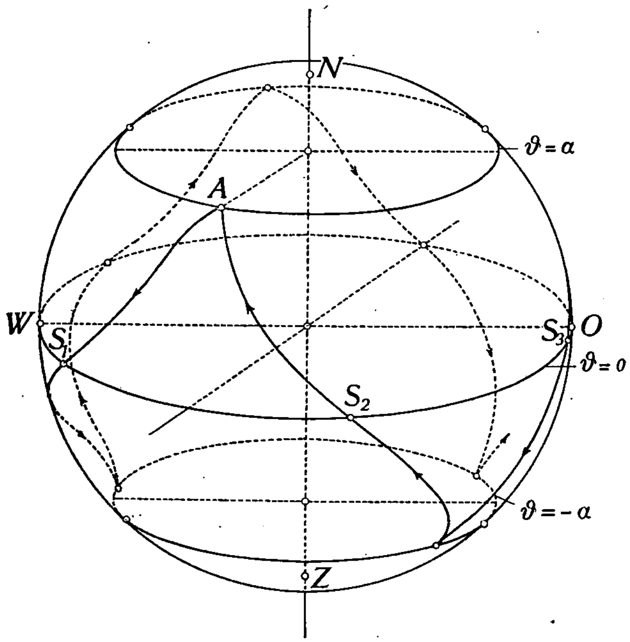


Fig. 3f.

c) $1 < k < \dfrac{1}{\cos\alpha}$. Tot het tijdstip waarvoor $\cos^2 \omega_1 t = \dfrac{1 - k\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$ is beweegt het punt zich oostwaarts, daarna gaat het westwaarts om de equator te bereiken in het punt S waarvoor φ_1 nog positief is; fig. 3c.

d) $k = 1$. Het punt S valt met M samen en het is een dubbelpunt van de baan. De door P beschreven kromme is nu gesloten. Uit (4) volgt haar vergelijking:

$$x = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2 \cos 2\,\omega t$$

$$y = \sin^2\frac{\alpha}{2} \sin 2\,\omega t,\; z = \sin\alpha \cos\omega t \qquad (10)$$

zodat dus haar projectie op het equatorvlak de cirkel is met $(\cos^2\frac{\alpha}{2}, 0, 0)$ tot middelpunt en met de straal $\sin^2\frac{\alpha}{2}$; deze cirkel raakt de equator in M. De baan is dus de doorsnede van de bol met een rakende cirkelcilinder; het is een biquadratische kromme met dubbelpunt, in de vorm van een *acht*. (fig. 3d).

e) $\cos\alpha < k < 1$. P heeft in A een oostwaarts gerichte snelheid, buigt daarna naar het westen af en snijdt de nulmeridiaan in D voor het in S, dat nu een negatieve lengte heeft, de equator bereikt. Het tijdstip waarop D wordt gepasseerd is de tussen 0 en T gelegen wortel van $\operatorname{tg} \omega_1 t = \cos\alpha \operatorname{tg} \dfrac{\omega_1 t}{k}$. Hoe kleiner k wordt hoe meer de lus in de baan zich samentrekt, terwijl S verder naar het westen gaat, fig. 3e.

f) $k = \cos\alpha$. In A is de snelheid van P nul, maar overigens negatief. Het dubbelpunt D is naar A opgeschoven en een keerpunt geworden. Uit (6) blijkt dat dit ook het enige geval is waarbij keerpunten in de baan kunnen optreden, fig. 3f.

g) $0 < k < \cos\alpha$. P beweegt zich voortdurend met naar het westen gerichte snelheid. Hoe kleiner k wordt hoe meer het snijpunt naar het westen opschuift. Hier doet zich het verschijnsel voor, dat overigens voor geschikte waarde van α ook reeds in e) en f) optreedt, namelijk dat P alvorens de evenaar te passeren één of meer volledige reizen om de wereld maakt. Voor S geldt $\varphi = \dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{k-1}{k}$, waaruit volgt dat er voor $\dfrac{1}{4n+5} < k \leqq \dfrac{1}{4n+1}$ n dergelijke volle slagen zijn. Voor kleine waarden van k beschrijft P een soort schroeflijn; na een omloop is P wat zuidelijker gekomen, fig. 3g.

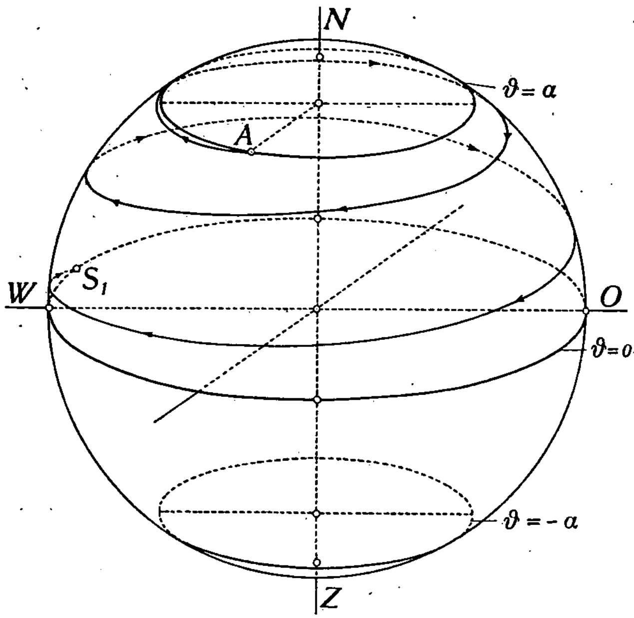


Fig. 3g.

h) $k = 0$. Dit is het uit het vorige volgende grensgeval: P blijft zich eenparig, met snelheid $v = -\omega \cos \alpha$ langs de breedtecirkel $\vartheta = \alpha$ bewegen. In de absolute beweging is P in rust. De schijnkracht $K_1 = \omega^2 \cos \alpha$ is buitenwaarts en $K_2 = 2\,\omega^2 \cos \alpha$ binnenwaarts, de resultante is inderdaad de centripetale kracht, die voor de beweging nodig is.

j) $k < 0$. Ook nu is de beweging blijvend naar het westen; ω_1 is nu negatief. De equator wordt voor $t = \frac{-\pi}{2\omega_1}$ bereikt en voor S geldt $\varphi = \frac{\pi}{2} \frac{1-k}{k}$. Voor kleine waarden van $|k|$ vinden herhaalde volle omlopen plaats, voor $k = -\frac{1}{3}$ is er op het noordelijke halfrond nog juist één omloop, voor $k = -\frac{1}{2}$ is $\varphi = \frac{-3\pi}{2}$, voor $k = -1$ is $\varphi = -\pi$, voor $k \to -\infty$ nadert φ tot $-\frac{\pi}{2}$ en de baan tot de grote cirkel door A.

Er resten nu nog de aanvankelijk uitgesloten gevallen $\alpha = 0$ en $\alpha = \frac{\pi}{2}$. In het eerste doorloopt P met de snelheid $(-\omega + \omega_1)$ de equator. Is $\alpha = \frac{\pi}{2}$ dan gaat het vlak van de absolute baan van P door de aardas: de relatieve baan gaat door de polen. Is voor

$t = 0$ het punt P in de Noordpool en is de snelheid langs de nulmeridiaan gericht, dan zijn de vergelijkingen van de beweging

$$x = \sin \omega_1 t \sin \omega t,\ y = \sin \omega_1 t \cos \omega t$$
$$z = \cos \omega_1 t \qquad (11)$$

Voor $\omega_1 = 0$ is P voortdurend in de noordpool, voor $\omega_1 \neq 0$ wordt voor $t = \frac{\pi}{2\omega_1}$ de equator bereikt, en wel in een punt S waarvoor $\varphi = -\frac{\pi}{2k}$. Elk volgend snijpunt met de equator ligt $\frac{\pi}{2k}$ verder naar het westen dan het vorige; fig. 4.

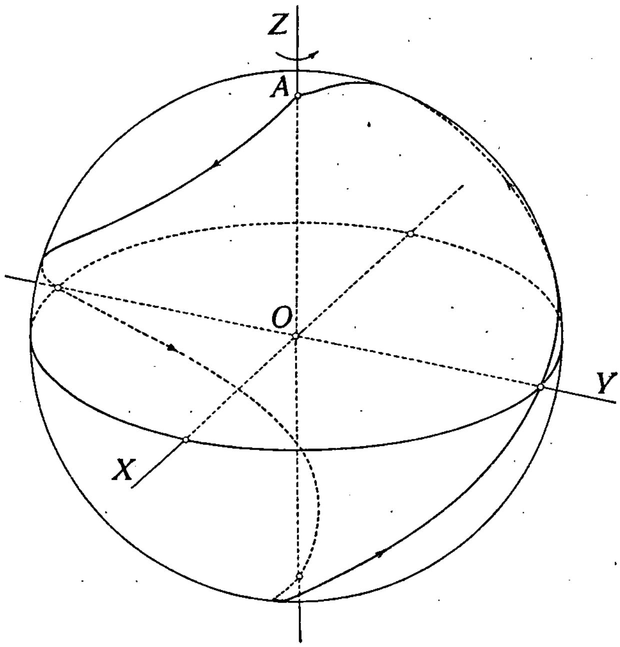


Fig. 4.

De figuren uit dit artikel zijn — met alleen de tekst als uitgangspunt — ontworpen en uitgevoerd door W. Th. Bousché.

DE STUDIEDAGEN TE ARLON

door

Dr. P. G. J. Vredenduin

(Oosterbeek)

Voor de vijfde keer zijn te Arlon studiedagen georganiseerd, ditmaal op 1, 2 en 3 juli. De organisatie is in handen van het Belgische pedagogisch centrum; de conferentie wordt bekostigd door de Belgische regering (commissie tot hervorming van het M.O.). Het aantal deelnemers neemt ieder jaar toe; ditmaal waren het er 470. Enkele tientallen had men moeten weigeren, omdat hiermee de maximale capaciteit bereikt was. Het doel van de studiedagen is enerzijds een herscholing van de leraren. Door Prof. Papy is daartoe een serie voordrachten gehouden over georiënteerde oppervlakte en uitwendige algebra, waardoor de toehoorders beter vertrouwd raakten met enkele niet te moeilijke moderne onderwerpen. Anderzijds streeft men ernaar verslag te doen van experimenten, die in het afgelopen jaar gehouden zijn. Ditmaal waren er zoveel verslagen van experimenten, dat men een keus moest doen uit verschillende voordrachten.

Ik wil me in dit verslag beperken tot de twee dingen, die zich het best lenen voor een bespreking in Euclides: de voordracht van Papy over georiënteerde oppervlakte en de uiteenzettingen over het programma van de zesde door collega Boucqué.

I. Georiënteerde oppervlakte

Het doel van de spreker was eerst een intuïtief gefundeerde theorie te geven over georiënteerde oppervlakte en daarna de zo verkregen resultaten als uitgangspunt te kiezen voor een mathematisch verantwoorde theorie.

I. In een plat vlak kan men een omloopsrichting bepalen door drie in volgorde gegeven punten, die niet op één lijn liggen. In een plat vlak zijn twee verschillende richtingen mogelijk. Op een möbiusband daarentegen zijn geen twee verschillende richtingen mogelijk: een möbiusband is niet oriënteerbaar. (Een möbiusband verkrijgt men door uit te gaan van een rechthoek $ABCD$ en deze tot een band te vervormen door BC samen te laten vallen met DA,

en wel zo, dat daarbij B op D en C op A komt. Denken we ons op de band een cirkel getekend voorzien van een pijltje om een omloopsrichting te markeren, en bewegen we de cirkel over de band een slag rond tot hij dus zijn oorspronkelijke stand weer bereikt, dan zien we, dat de richting van het pijltje omgekeerd is. Dit wil zeggen, dat op de band geen oriëntatie mogelijk is.)

Kies nu in het platte vlak drie niet collineaire punten u_1, u_2, u_3. Kies een tweede tripel q_1, q_2, q_3, dat wel collineair mag zijn. Dan is er een positief reëel getal r zo, dat

$$\text{opp.}\ (q_1\, q_2\, q_3) = r \cdot \text{opp.}\ (u_1\, u_2\, u_3).$$

Is het tweede drietal q_1, q_2, q_3 collineair, dan is $r = 0$. We kunnen nu ook nog de oriëntatie in aanmerking nemen en afspreken, dat $r > 0$, als q_1, q_2, q_3 dezelfde oriëntatie heeft als u_1, u_2, u_3, en dat $r < 0$, als deze oriëntaties verschillend zijn. De zo verkregen georiënteerde oppervlakte noteren we $\wedge(q_1\, q_2\, q_3)$. Dan is

$$\wedge\ (q_1\, q_2\, q_3) = r \cdot \wedge\ (u_1\, u_2\, u_3).$$

De zo verkregen verzameling van georiënteerde oppervlakten noteren we A. Dus

$$A = \{r \cdot \wedge\ (u_1\, u_2\, u_3) \mid r \in R\},$$

waarin R de verzameling van de reële getallen voorstelt.

We definiëren nu als volgt een optelling van georiënteerde oppervlakten en een (scalaire) vermenigvuldiging van een georiënteerde oppervlakte met een reëel getal:

$$a \cdot \wedge\ (u_1\, u_2\, u_3) + b \cdot \wedge\ (u_1\, u_2\, u_3) = (a + b) \cdot \wedge\ (u_1\, u_2\, u_3),$$
$$a(b \cdot \wedge\ (u_1\, u_2\, u_3)) = ab \cdot \wedge\ (u_1\, u_2\, u_3).$$

Na deze definities vormen de georiënteerde oppervlakten een vectorruimte over de reële getallen. Deze vectorruimte is eendimensionaal. Het neutrale element is de georiënteerde oppervlakte van een collineair tripel.

Laat nu gegeven zijn twee translaties t_1 en t_2. Onder tp verstaan we het punt, dat door de translatie t aan p toegevoegd wordt. We beschouwen nu twee tripels, nl. p, t_1p, t_2p en q, t_1q, t_2q, waarin p en q twee willekeurige punten zijn. Door een translatie van p naar q gaat het eerste tripel in het tweede over. Nu is

$$\wedge\ (p, t_1p, t_2p) = \wedge\ (q, t_1q, t_2q).$$

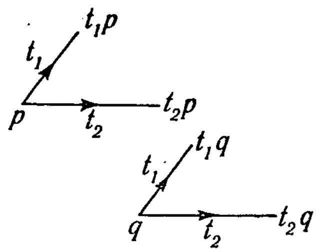


Fig. 1

Deze formule brengt tot uitdrukking, dat door een translatie oriëntatie van een tripel en oppervlakte bewaard blijven. We kunnen dus ook beweren, dat de beide vectoren $\boldsymbol{t}_1$ en $\boldsymbol{t}_2$ een georiënteerde oppervlakte bepalen. Deze noteren we: $\boldsymbol{t}_1 \wedge \boldsymbol{t}_2$. Dus

$$\boldsymbol{t}_1 \wedge \boldsymbol{t}_2 = \wedge\, (p, t_1p, t_2p),$$

waarin p een willekeurig punt is [1]).

Hiermee is een afbeelding verkregen van paren translaties op de verzameling A van de georiënteerde oppervlakten. Deze afbeelding $T \times T \rightarrow A$ (T is de verzameling van de translaties) heet *uitwendige vermenigvuldiging.*

Uit deze definitie volgt onmiddellijk

$$\boldsymbol{t}_1 \wedge \boldsymbol{t}_2 = 0 \Rightarrow p_1, t_1p, t_2p \text{ zijn collineair} \Rightarrow \boldsymbol{t}_1 \text{ en } \boldsymbol{t}_2 \text{ zijn afhankelijk.}$$

Gevolg:

$$\boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{t} = 0,$$
$$\boldsymbol{t}_1 \wedge \boldsymbol{t}_2 = -\,(\boldsymbol{t}_2 \wedge \boldsymbol{t}_1) \text{ (anti-commutatieve eigenschap),}$$
$$a\,\boldsymbol{t}_1 \wedge b\,\boldsymbol{t}_2 = ab\,(\boldsymbol{t}_1 \wedge \boldsymbol{t}_2).$$

De laatste formule kan men gemakkelijk meetkundig bewijzen. Verder kan men nog de volgende twee distributieve wetten bewijzen:

$$\boldsymbol{t}_1 \wedge (\boldsymbol{t}_2 + \boldsymbol{t}_3) = (\boldsymbol{t}_1 \wedge \boldsymbol{t}_2) + (\boldsymbol{t}_1 \wedge \boldsymbol{t}_3),$$
$$(\boldsymbol{t}_1 + \boldsymbol{t}_2) \wedge \boldsymbol{t}_3 = (\boldsymbol{t}_1 \wedge \boldsymbol{t}_3) + (\boldsymbol{t}_2 \wedge \boldsymbol{t}_3).$$

Het bewijs van de eerste formule geschiedt in drie etappes.

a. $\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{0}$. Men vindt het bewijs gemakkelijk zelf.

b. $\boldsymbol{t}_1 \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{t}_2 = a\,\boldsymbol{t}_1$. Men verifieert de juistheid met behulp van fig. 2.

---

[1]) $\boldsymbol{t}_1 \wedge \boldsymbol{t}_2$ is dus op een factor 2 na het traditionele uitwendige produkt van twee vectoren.

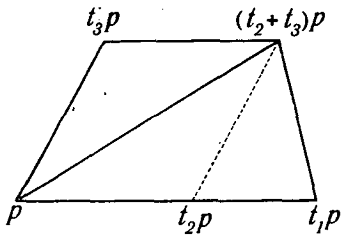


Fig. 2

c. t_1 en t_2 zijn onafhankelijk. Dan is $t_3 = a\,t_1 + b\,t_2$. Vervangt men t_3 door het rechter lid van deze gelijkheid, dan vindt men na enig rekenwerk de juistheid van de formule.

De tweede formule volgt uit de eerste door toepassing van de anti-commutatieve eigenschap.

Hiermee zijn de volgende fundamentele eigenschappen van de uitwendige vermenigvuldiging van vectoren afgeleid:

anti-commutatieve eigenschap $t_1 \wedge t_2 = -(t_2 \wedge t_1)$

gemengd-associatieve eigenschap $a\,t_1 \wedge b\,t_2 = ab\,(t_1 \wedge t_2)$

distributieve eigenschappen $t_1 \wedge (t_2 + t_3) = (t_1 \wedge t_2) + (t_1 \wedge t_3)$

$(t_1 + t_2) \wedge t_3 = (t_1 \wedge t_3) + (t_2 \wedge t_3)$.

De gemengd-associatieve eigenschap plus de beide distributieve eigenschappen zijn ekwivalent met het volgende tweetal eigenschappen:

$t_1 \wedge (a\,t_2 + b\,t_3) = a\,(t_1 \wedge t_2) + b\,(t_1 \wedge t_3)$

$(c\,t_1 + d\,t_2) \wedge t_3 = c\,(t_1 \wedge t_3) + d\,(t_2 \wedge t_3)$.

Deze twee eigenschappen houden in, dat de uitwendige vermenigvuldiging bilineair is.

Het bewijs van de ekwivalentie laat ik weer aan de lezer over. (Een artikel, waarin dergelijk gereken uitgevoerd wordt, is m.i. ontzettend vervelend. Ik hoop, dat u er ook zo over denkt.)

We kunnen het gevondene nu als volgt samenvatten:

uitwendige vermenigvuldiging is een afbeelding $T \times T \rightarrow A$, waarin A een vectorruimte van dimensie 1 is,

de uitwendige vermenigvuldiging is anti-commutatief en bilineair,

t_1 en t_2 zijn onafhankelijk $\Rightarrow t_1 \wedge t_2 \neq 0$.

(Het omgekeerde van deze laatste bewering is bewijsbaar uit overige eigenschappen.)

Met dit resultaat is de heuristische inleiding geëindigd. We gaan nu over tot een formele definitie van uitwendige vermenigvuldiging, georiënteerde oppervlakte en oriëntatie.

II. In het voorgaande zijn we ervan uitgegaan, dat intuïtief duidelijk was, wat onder georiënteerde oppervlakte verstaan werd en hebben we op grond van een intuïtief uitgangspunt eigenschappen van georiënteerde oppervlakte opgespoord. Dit is slechts een aanloopje om tot een definitie van dit begrip te komen en wel tot een definitie, waarvan men de strekking niet zou begrijpen, als men van de voorgaande intuïtieve inleiding geen kennis zou nemen.

We hebben gezien, dat we spreken van de georiënteerde oppervlakte van een vectorpaar in een tweedimensionale ruimte en dat deze georiënteerde oppervlakte zelf weer een vector is, maar nu in een eendimensionale ruimte. We gaan dus uit van een tweedimensionale vectorruimte T en beelden $T \times T$ af op een eendimensionale vectorruimte A. De aard van deze afbeelding moet zo zijn, dat ze de eigenschappen heeft, die in de intuïtieve inleiding gevonden zijn; de afbeelding moet dus anticommutatief en bilineair zijn.

Gegeven is dus een tweedimensionale vectorruimte T. Deze beelden we af op een eendimensionale vectorruimte A op zodanige manier, dat de afbeelding anti-commutatief en bilineair is. Het beeld van het paar $(\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2)$ noteren we: $\boldsymbol{t}_1 \wedge \boldsymbol{t}_2$. Dit beeld noemen we het *uitwendige produkt* van $\boldsymbol{t}_1$ en $\boldsymbol{t}_2$. (Als straks $\boldsymbol{t}_1$ en $\boldsymbol{t}_2$ de speciale betekenis krijgen van vectoren in een plat vlak, geven we dit uitwendige produkt de naam georiënteerde oppervlakte.)

We kunnen onze hierboven gegeven definitie van uitwendig produkt vervangen door een definitie, op grond waarvan men de uitwendige oppervlakte direct kan vinden en die ermee gelijkwaardig zal blijken. Onze nieuwe definitie luidt als volgt. Kies in de ruimte T twee basisvectoren $\boldsymbol{e}_1$ en $\boldsymbol{e}_2$. Voeg aan het paar $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ een willekeurig element van A toe, dat van 0 verschilt, zodat dus

1°. $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \neq 0.$

Het uitwendig produkt van een willekeurig paar vectoren laat zich nu direct aflezen uit het tweede lid van de definitie, waarvoor we kiezen:

2°. $$(a\,\boldsymbol{e}_1 + b\,\boldsymbol{e}_2) \wedge (c\,\boldsymbol{e}_1 + d\,\boldsymbol{e}_2) = (ad - bc)\,(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2). \tag{1}$$

Er rest ons nu de gelijkwaardigheid van deze definitie met de voorgaande aan te tonen. Daartoe bewijzen we twee stellingen.

Stelling. Als we aannemen, dat een afbeelding van $T \times T$ op A

anti-commutatief en bilineair is, dan ligt de afbeelding eenduidig vast door de keuze van $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$ en heeft de afbeelding de eigenschap (1).

Bewijs. Omdat de afbeelding anti-commutatief is, is voor elke $\boldsymbol{u}$: $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{u} = 0$. Het uitvoeren van de bewerking op de basisvectoren $\boldsymbol{e}_1$ en $\boldsymbol{e}_2$ geschiedt dus volgens de tabel:

$\wedge$	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$
$\boldsymbol{e}_1$	0	$\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2$
$\boldsymbol{e}_2$	$-(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2)$	0

Ten gevolge van de bilineariteit is met behulp van deze tabel het uitwendig produkt van elk paar vectoren afleidbaar. Dat aan de eigenschap (1) voldaan is, kan men gemakkelijk verifiëren.

Stelling. Als een afbeelding anti-commutatief en bilineair is, dan heeft ze de eigenschap (1).

Het bewijs laat ik weer aan de lezer over.

Het zal de lezer wel opgevallen zijn, dat de eigenschap $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \neq 0$ correspondeert met de intuïtief gevonden eigenschap: $\boldsymbol{t}_1$ en $\boldsymbol{t}_2$ zijn onafhankelijk $\Rightarrow \boldsymbol{t}_1 \wedge \boldsymbol{t}_2 \neq 0$.

We gaan nu de theorie van de uitwendige vermenigvuldiging van vectoren toepassen in de planimetrie. We gaan uit van een plat vlak. De puntenparen vatten we op als vectoren (waarbij we op de gebruikelijke manier de paren verdelen in ekwivalentieklassen van paren, die „gelijk en gelijk gericht'' zijn). We definiëren nu als *georiënteerde oppervlakte* van het puntentripel a_1, a_2, a_3:

$$\wedge\,(a_1\, a_2\, a_3) = \boldsymbol{a_1a_2} \wedge \boldsymbol{a_1a_3}.$$

Om deze definitie te begrijpen, moeten we ons het verschil realiseren tussen de situatie, waarin ze gegeven is, en de vroegere intuïtieve situatie. We zijn nu in het bezit van een formele definitie van uitwendige vermenigvuldiging van vectoren. In het platte vlak hebben we vectoren (nl. de puntenparen, of strikter de ekwivalentieklassen van puntenparen). We weten dus, wat onder het uitwendig produkt van twee van deze vectoren verstaan wordt. We weten ook, dat dit uitwendig produkt nog niet eenduidig vastligt, maar dat het wel vastligt, zodra we het uitwendig produkt van één paar onafhankelijke vectoren willekeurig aannemen, mits van 0 verschillend. Kies dus een willekeurig niet-collineair puntentripel en ken daaraan een willekeurige van 0 verschillende georiënteerde oppervlakte toe. Dan is eenduidig vastgelegd, wat onder de georiënteerde oppervlakte van een willekeurig tripel verstaan wordt.

Willen we nu de georiënteerde oppervlakte in een (reëel) getal

uitdrukken, dan gaan we als volgt te werk. De verhouding van twee georiënteerde oppervlakten definiëren we door middel van:

$$\frac{\wedge\,(a_1\,a_2\,a_3)}{\wedge\,(b_1\,b_2\,b_3)} = r \text{ wil zeggen, dat } \wedge\,(a_1\,a_2\,a_3) = r \cdot \wedge\,(b_1\,b_2\,b_3).$$

Dit lijkt vreemd. Men moet er echter aan denken, dat men een uitwendig produkt met een reëel getal r kan vermenigvuldigen, maar dat van deling van twee uitwendige produkten nog geen sprake geweest is.

Bovenstaande definitie stelt ons nu in staat een bepaald tripel als vast vergelijkingstripel te kiezen en de georiënteerde oppervlakten in verhouding tot de georiënteerde oppervlakte van dat tripel te bepalen. De georiënteerde oppervlakte wordt dan in een reëel getal (nl. r) uitgedrukt [1]). Van een reëel getal kunnen we de absolute waarde nemen. Dit geeft ons aanleiding tot de volgende definitie:

oppervlakte = absolute waarde van georiënteerde oppervlakte.

Ten slotte kunnen we nu nog een definitie van *oriëntatie* (omloopsrichting) geven:

$(a_1\,a_2\,a_3)$ en $(b_1\,b_2\,b_3)$ hebben dezelfde omloopsrichting wil zeggen, dat $\dfrac{\wedge\,(a_1\,a_2\,a_3)}{\wedge\,(b_1\,b_2\,b_3)} > 0.$

Hiermee is de voorafgaande heuristische beschouwing als uitgangspunt gekozen om tot een adequate definitie van de begrippen georiënteerde oppervlakte, oppervlakte en oriëntatie te komen.

II. Het programma in de zesde

In België begint het eigenlijke wiskunde-onderwijs in de vijfde klasse (de klassen nummeren van zes tot één). In de zesde klasse wordt een soort rekenonderwijs gegeven, dat aansluit bij het onderwijs op de lagere school. Vandaar, dat het in België mogelijk is zonder het normale programma te doorbreken de wiskunde-uren in de zesde geheel of gedeeltelijk te besteden aan experimenten om te onderzoeken in hoeverre het mogelijk is een moderne inleiding in de wiskunde aan jonge kinderen te doceren. Met goedvinden van de inspectie zijn in verschillende scholen dergelijke experimenten

[1]) Het wil me voorkomen, dat men deze beschouwingen kan vereenvoudigen door voor A te kiezen de verzameling van de reële getallen, die immers ook een eendimensionale vectorruimte vormen. Men heeft dan meteen de georiënteerde oppervlakte in een reëel getal uitgedrukt. Het standpunt van Papy is meer algemeen en daarom fraaier.

verricht en deze hebben ertoe geleid, dat thans een ontwerp-programma gereed ligt, dat door elke leraar in de zesde gevolgd mag worden. Dat wil zeggen, dat met ingang van de nieuwe cursus (1963—64) elke leraar mag kiezen, of hij in de zesde op de traditionele wijze of op moderne wijze wil les geven. De keuze geschiedt door de leraar en niet door de schoolleiding, zodat het mogelijk is, dat op een school in parallelklassen volgens verschillende methoden les wordt gegeven. De inhoud van het nieuwe programma was op het moment van de conferentie nog niet officieel bekend; ik heb echter wel begrepen, dat het programma nauw zal aansluiten bij de uitgevoerde experimenten. Hieronder volgt het verslag van de experimenten van collega E. Boucqué.

Hoofdstuk 1. Algemeenheden over verzamelingen. Ter sprake komen de venn-diagrammen, de notaties $V = \{a, b, c, d\}$, $a \in V$, $f \notin V$. Verder de lege verzameling $\emptyset$, gelijkheid van verzamelingen (en in het bijzonder de opmerking, dat $\{0\} \neq \emptyset$), deelverzameling, de notatie $W \subset V$ (en in het bijzonder $V \subset V$, $\emptyset \subset V$).

Hoofdstuk 2. Voorbeelden van verzamelingen, die bij de wiskunde aansluiten. Ter sprake komt de verzameling N van de natuurlijke getallen. Nu oneindige verzamelingen aan de orde komen, is een notatie nodig voor verzamelingen met oneindig veel elementen. Daartoe wordt gebruik gemaakt van de verzamelingenbouwer: $\{x \mid x \in \mathrm{N}$ en $x < 10\}$ is een schrijfwijze voor de verzameling van de natuurlijke getallen, die kleiner dan 10 zijn. Verder komen ter sprake puntverzamelingen, waardoor men de gelegenheid krijgt vertrouwd te raken met enkele fundamentele planimetrische begrippen. $A \in \pi$ wil zeggen dat punt A in vlak π ligt, $l \subset \pi$ dat de lijn l in vlak π ligt. Moderne notatie wordt toegepast; zo wordt de bewering, dat een lijn, die twee punten met een vlak gemeen heeft, er geheel in ligt, als volgt geschreven:

$$\left.\begin{array}{r} A, B \in \pi \\ A \neq B \end{array}\right\} \Rightarrow \text{rechte lijn } AB \subset \pi.$$

Meetkundige begrippen, die aan de orde komen, zijn verder: halve lijn, lijnstuk, half vlak, hoek (als tweedimensionaal deel van een vlak), cirkel, middellijn, koorde, boog, middelpuntshoek. Natuurlijk gaat het hier alleen om kennismaking met enige meetkundige begrippen (puntverzamelingen), maar niet om het ontwikkelen van een begin van deductieve meetkunde.

Hoofdstuk 3. Bewerkingen met verzamelingen. Behandeld worden doorsnede, vereniging en verschil van twee verzamelingen (het verschil $V \setminus W$ van V en W bestaat uit de elementen van V, die geen

element van *W* zijn). De commutatieve en de associatieve eigenschap worden besproken (nog niet de distributieve) en men ziet, dat deze niet voor het verschil gelden. Verder komt aan de orde de partitie van een verzameling, d.i. een verdeling van een verzameling *V* in deelverzamelingen zo, dat elk element van *V* in een deelverzameling zit, elke twee deelverzamelingen een lege doorsnede hebben en geen deelverzameling leeg is. Een partitie van de lijnen van een plat vlak wordt tot stand gebracht door de deelverzamelingen van onderling evenwijdige lijnen, echter niet door de deelverzamelingen van onderling concurrente lijnen.

Hoofdstuk 4. Toepassingen van doorsnede en vereniging. De doorsnede van twee lijnen kan een punt zijn, genoteerd $a \cap b = \{S\}$, als ze elkaar in *S* snijden. Het is ook mogelijk, dat ze evenwijdig zijn, in welk geval geldt $a \cap b = \emptyset$ of $a \cap b = a$.

De verzameling van lijnen, die evenwijdig aan *a* zijn, wordt genoemd de richting van *a*; de richtingen vormen dus een partitie van de lijnen van het platte vlak.

Nu volgt de definitie van een convexe verzameling en het bewijs, dat de doorsnede van twee convexe verzamelingen weer convex is. Dit is tevens het eerste voorbeeld van een bewijs in de wiskunde. De doorsnede van twee halve vlakken is een convexe hoek, de vereniging een niet-convexe hoek.

Het arsenaal van meetkundige begrippen wordt verder uitgebreid met hoekmaat, loodrechte stand, parallellogram (als doorsnede van twee door evenwijdige lijnen begrensde stroken), rechthoek, ruit, vierkant. Dit geeft aanleiding tot het venn-diagram van fig. 3.

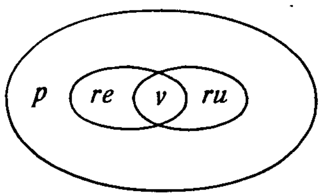


Fig. 3

Hoofdstuk 5. Relaties. Eerst worden behandeld de relaties binnen een bepaalde verzameling, daarna de relaties van *A* naar *B*. Zie voor de wijze, waarop deze begrippen aanschouwelijk toegelicht worden resp. fig. 4 en 5. Men kan de behandelingswijze omkeren en beginnen met de relaties van *A* naar *B*; dit bleek echter minder goede resultaten te geven.

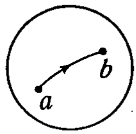


Fig. 4

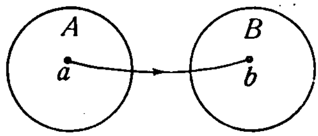


Fig. 5

Dat a in de relatie R tot b staat, wordt genoteerd $a\ R\ b$. De relatie is de verzameling van de „pijlen", d.w.z. de verzameling van de geordende paren (a, b). Deze verzameling is een deel van de produktverzameling $A \times B$, die bestaat uit alle paren, waarvan het eerste element tot A en het tweede tot B behoort. We kunnen de relatie ook voorstellen door een rooster. In fig. 6 is in roostervorm weergegeven het produkt $A \times B$ van de verzamelingen $A = \{a, b, c\}$ en $B = \{d, e\}$. Elke relatie van A naar B is hier een deelverzameling van en kan als zodanig in het rooster worden aangetekend.

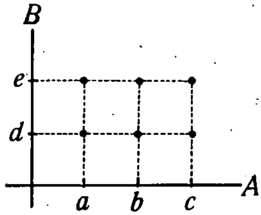


Fig. 6

Aan de orde komen de begrippen inverse relatie, functie als bijzonder geval van een relatie, bifunctie (een relatie is een bifunctie als zowel de relatie zelf als haar inverse een functie is) en verder reflexieve, symmetrische en transitieve relaties.

Hoofdstuk 6. Eerste begrip van punttransformaties. De leerlingen maken kennis met verschuiving, draaiing en spiegeling. Dit zijn toepassingen van het algemene begrip relatie. Twee figuren worden congruent genoemd, als ze door verschuiving, draaiing of spiegeling (eventueel herhaald uitgevoerd) in elkaar kunnen overgaan.

Hiermee wordt de eerste helft van de cursus afgesloten. Collega Boucqué had het plan dit met Kerstmis af te hebben; het gelukte hem echter alleen tot en met het vijfde hoofdstuk te komen. Hij besteedde hieraan drie wekelijkse lesuren. Het vierde lesuur werd aan numerisch rekenen besteed.

In het resterende deel van de cursus werd eveneens drie uur per week aan het nu volgende deel van het programma besteed. Zo

men zien zal, is dit meer wiskundig en minder specifiek logisch van aard.

Hoofdstuk 7. Natuurlijke getallen. De natuurlijke getallen worden ingevoerd als kardinaalgetallen van verzamelingen. Daartoe is het noodzakelijk eerst de gelijkmachtigheid van verzamelingen te bespreken. Dit blijkt te zijn een reflexieve, symmetrische en transitieve relatie tussen verzamelingen. Kardinaalgetallen zijn nu verzamelingen van onderling gelijkmachtige verzamelingen. Hier is dus weer sprake van een partitie. Het deed me genoegen, dat de spreker niet aarzelde zelf in twijfel te trekken, of deze behandelingswijze wel in dit stadium didactisch verantwoord is. Hij voegde er dadelijk aan toe, dat het hem beter leek te vertellen, dat een natuurlijk getal het aantal elementen van een verzameling is. Het getal 0 wordt tot de natuurlijke getallen gerekend.

Notatie voor het kardinaalgetal van A: $\# A$.

Hoofdstuk 8. Optelling. Om twee getallen a en b op te tellen kiezen we twee verzamelingen, die geen element gemeen hebben, waarvan a en b de aantallen elementen zijn. De definitie van de som van de twee natuurlijke getallen is nu als volgt: $\# A + \# B = \# (A \cup B)$ $(A \cap B = 0)$.

De optelling is commutatief en associatief, het neutrale element van de optelling is 0. Dit alles volgt gemakkelijk uit de definitie.

Hoofdstuk 9. Aftrekking. De bewerking $?x \in \mathrm{N}$, waarvoor $10 + x = 7$, blijkt niet uitvoerbaar te zijn. Zo zien we, dat aftrekking van twee natuurlijke getallen niet steeds mogelijk is. In de gevallen, waarin de aftrekking wel mogelijk is, kan men ze door middel van verzamelingen met behulp van de volgende formule weergeven: als $B \subset A$, dan is $\# A - \# B = \# (A \setminus B)$.

Hoofdstuk 10. Vermenigvuldiging. Deze wordt gedefinieerd door middel van $\# A \cdot \# B = \# A \times B$. Het produkt van de kardinaalgetallen van A en B is gelijk aan het kardinaalgetal van de produktverzameling. Uit deze definitie volgt weer de commutatieve, de associatieve eigenschap en de eigenschap, dat 1 het neutrale element van de vermenigvuldiging is. Verder laat zich nu ook de distributieve eigenschap bewijzen.

Hoofdstuk 11. Deling. Deze wordt gedefinieerd als inverse van de vermenigvuldiging: $?x \in \mathrm{N}$, waarvoor $3 \cdot x = 12$. De deling is niet altijd uitvoerbaar.

De hoofdstukken 12—14 gaan over machtsverheffing en vierkantswortels, vergelijkingen en vraagstukken (algebraïsche oplossing van verschillende vraagstukken), het binaire stelsel (dat

spreker in de klasse wegens tijdgebrek heeft moeten overslaan).

Hoofdstuk 15. Dieper ingaan op translaties, vectoren en hoeken. Gedefinieerd wordt de optelling van twee translaties. Als we afspreken, dat een translatie een verschuiving over een vector is, is hiermee meteen de optelling van vectoren gedefinieerd; zie fig. 7.

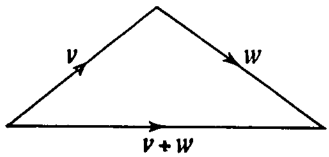


Fig. 7

De optelling van vectoren is commutatief en associatief, er is een nulelement (de nulvector), de aftrekking van vectoren is altijd mogelijk. We komen hier voor het eerst een voorbeeld van een groep tegen; de naam groep wordt echter nog niet genoemd.

Aftrekking van vectoren, die eenzelfde drager hebben, leidt nu tot aftrekking van willekeurige natuurlijke getallen. Daarmee wordt de verzameling Z van de gehele getallen geïntroduceerd. De optelling van gehele getallen komt nu vanzelf tot stand.

Verder wordt nog ingegaan op de optelling van hoeken en het rekenen met hoeken.

Hoofdstuk 16. Deelbaarheid. Als definitie van deelbaarheid wordt gegeven $a \mid b \Leftrightarrow \exists\, q \in \mathrm{N} \cdot aq = b$. Deze nogal abstracte definitie bleek veel moeilijkheden op te leveren. Ter sprake komen k.g.v., g.g.d., ontbinding in factoren, priemfactoren.

Hoofdstuk 17. Breuken. De leerlingen weten van de lagere school, wat $\frac{3}{4}$ is. Ze hebben daar breuken leren optellen en het produkt leren uitrekenen van een breuk met een natuurlijk getal. Verder gaat men op de lagere school niet.

Omdat $\frac{3}{4} \neq \frac{4}{3}$, is een breuk een geordend paar getallen. We kunnen de breuken weer voorstellen in roostervorm, zoals in fig. 8 is weergegeven.

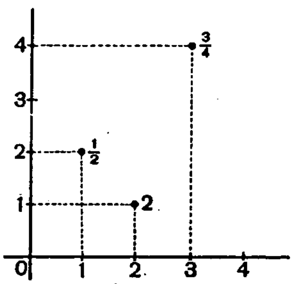


Fig. 8

We stuiten allereerst op het probleem van de gelijkheid van breuken. We weten, dat $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$. We vegen nu de breukstrepen weg en vragen, welk verband er moet bestaan tussen de getallen $\frac{3}{4}$ $\frac{6}{8}$, willen de genoemde twee breuken aan elkaar gelijk zijn. De leerling vindt dan, dat daarvoor vereist is $3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$. Meer algemeen wordt nu afgesproken: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$. Op deze wijze ontstaat een partitie van de breuken. In het rooster komen de deelverzamelingen van deze partitie neer op de breuken, die gelegen zijn op een rechte lijn door de oorsprong (de oorsprong zelf niet meegerekend). We zien nu, dat we teller en noemer met hetzelfde getal mogen vermenigvuldigen en dat we een breuk kunnen vereenvoudigen. Hiermee is de invoering van rationale getallen voorbereid: dit zijn verzamelingen van onderling gelijke breuken. De verzameling van de positieve rationale getallen schrijven we Q^+.

Hierna volgen de regels voor het optellen en vermenigvuldigen van breuken. Deze worden zonder meer gegeven. De regels voor het aftrekken en delen worden eruit afgeleid.

Ten slotte laten we zien, dat Q^+ een uitbreiding van N is. Zo is b.v. $2 + 3 = \frac{2}{1} + \frac{3}{1} = \frac{5}{1} = 5$, $2 \cdot 3 = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{1} = \frac{6}{1} = 6$, $2 : 3 = \frac{2}{1} : \frac{3}{1} = \frac{2}{3}$. En met dit laatste resultaat blijkt meteen, dat de deling van natuurlijke getallen altijd mogelijk is geworden en dat $\frac{2}{3}$ inderdaad het quotiënt van 2 en 3 is.

Hiermee is het programma ten einde. Aan het einde van het jaar heeft men in België een overgangsexamen. Het is instructief tot slot te zien, welke vragen op dit examen gesteld werden. De beschikbare tijd was drie uur.

1. a. Schrijf een formule op, die uitdrukt, dat 0 het neutrale element van de optelling is. (antwoord: $a + 0 = a$)
   b. Bewijs die eigenschap met behulp van verzamelingen. (antwoord: ze volgt uit $A \cup \emptyset = A$)
   c. $17 + 113 + 0 = 17 + 113 = 17 + 100 + 13 = 17 + 13 + 100$. Welke eigenschappen worden hier toegepast?
2. a. Verdrijf de haakjes in $a - (b - c)$.
   b. Lees uit het resultaat de regel af voor de aftrekking.
   c. Geef een voorbeeld uit het hoofdrekenen, waarbij deze regel wordt toegepast. (antwoord: 2174 — 999; spreker vond achteraf de vraag slecht gesteld)
3. a. Geef de regel om het k.g.v. en die om de g.g.d. te vinden.
   b. Bereken k.g.v. en g.g.d. van 60, 42, 36.

4. $\frac{4}{3} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{6}) = \ldots$
   $(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{6} = \ldots$
   De uitkomsten laten zien, dat de aftrekking van breuken $\frac{\text{een}}{\text{geen}}$ commutatieve, associatieve, distributieve bewerking is. (antwoord: geen associatieve)
5. $\dfrac{\frac{2}{3} + 5}{\frac{1}{14} + \frac{2}{7} \cdot 5} = \ldots$
6. $(-5) + (-3) - (-2) - (+1) = \ldots$
   $14 - 21 + 7 - 6 = \ldots$
   $a - b = \ldots$, als $a = -2$ en $b = -6$.
7. $A = \{(x, y) \mid x \mid 8 \text{ en } y \mid 4\}$. Schrijf deze verzameling door de elementen op te sommen.
   Doe hetzelfde met $B = \left\{\frac{x}{y} \,\middle|\, \frac{x}{y} = \frac{3}{4} \text{ en } 12 < x \leqq 20.\right\}$
8. a. Onderwerp a en b aan een rotatie om O over $-60°$ (fig. 9).
   b. Is $a' \parallel a$, is $a' \parallel b'$?
   c. Welke draaiingshoek geeft $b' \parallel b$?
   (Het resultaat van a viel tegen.)

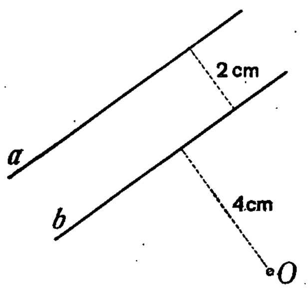


Fig. 9

9. a. Wat voor soort hoeken zijn A_1 en A_2, A_1 en A_3 (zie fig. 10)?
   b. $A_1 = 77°14'38''$. Dan is $2A_1 - A_2 = \ldots$

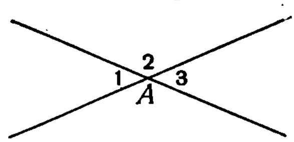


Fig. 10

10. a. $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$. Welke regel wordt door deze formule tot uitdrukking gebracht? (De spreker schrijft: $\vec{a}$.)

b. Druk $\boldsymbol{x}$ en $\boldsymbol{y}$ in $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ en $\boldsymbol{c}$ uit (zie fig. 11).
In b werd in het algemeen wel het juiste antwoord voor $\boldsymbol{x}$ echter niet voor $\boldsymbol{y}$ gevonden.

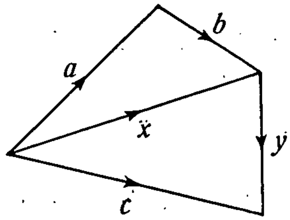


Fig. 11

11. Geef een definitie van de som van twee natuurlijke getallen (m.b.v. kardinaalgetallen).
Geef een definitie van: *a* is een deler van *b*.
Geef een definitie van priemgetal.
Geef een definitie van gelijke positieve breuken.
Geef een definitie van congruente figuren.
12. Welke hoek is 12° meer dan het dubbele van zijn supplement?
Aanwijzing: noem het supplement $x°$.

Er is zonder twijfel meer over dit congres te vertellen. Zo hield collega Debbaut een voordracht over experimenten, die hij gedaan had in de vijfde klasse om de reële getallen op mathematisch verantwoorde manier in te voeren. Ik wil het echter hierbij laten.

Tot slot wil ik nog vermelden, dat men zowel onder degenen, die op de conferentie een actieve als onder hen, die een passieve rol speelden, zeer veel jonge leraren aantrof. Collega Boucqué b.v. was 28 jaar! Ik hoop, dat dit voorbeeld in ons land navolging mag vinden.

RECTIFICATIE

In het artikel „Een Experiment" van Dr. A. van Haselen in het vorige nummer zijn een aantal regels verkeerd terecht gekomen: de bovenste 8 regels van blz. 52 behoren bovenaan blz. 51 te staan.

WIMECOS

Aan de leden van Wimecos.

Op 27 december 1963 zal de jaarlijkse ledenvergadering van onze vereniging gehouden worden. Het is ons opgevallen dat de vergaderingen voor het merendeel door de oudere, doorgewinterde docenten worden bijgewoond die met veel interesse de talloze didactische problemen die te berde worden gebracht, beluisteren en bespreken.

Vooral met het oog op de grote veranderingen die in ons wiskundeonderwijs te verwachten zijn, worden deze problemen steeds moeilijker. Des te verontrustender is het, dat een opvallend groot deel van de collega's en speciaal de jongeren, betrekkelijk weinig gebruik maakt van de mogelijkheden tot gedachtenwisseling op onze samenkomsten. Het ledental van Wimecos bedraagt thans ongeveer 650 en het is niet ongewoon dat slechts 10 % hiervan de ledenvergaderingen bezoekt. Wij vragen ons af wat de oorzaken hiervan kunnen zijn. Is het de datum die meestal in de Kerstvakantie valt? Of kost de reis naar Utrecht te veel tijd? Bestaat er bij velen een vergadermoeheid? Een zekere lauwheid t.a.v. ons vak lijkt ons uitgesloten.

Het bestuur heeft naar een oplossing voor dit probleem gezocht. We hebben gedacht aan splitsing van de samenkomsten in verschillende delen van ons land. Ook hebben we overwogen bepaalde excursies te verbinden aan onze vergaderdagen. Deze koersveranderingen gaan echter gepaard met budgetverhogingen, zodat op de eerstvolgende bijeenkomst op 27 december enige tijd gereserveerd zal worden om over een en ander te discussiëren. Wellicht komen we zo tot een positief resultaat.

Elders in dit nummer van Euclides staat vermeld wie de sprekers zijn en welke wetenschappelijke en didactische onderwerpen door hen worden behandeld. Men zal constateren, dat het hier gaat over zeer moderne stromingen in de didactiek. Iedere aanwezige zal in de gelegenheid zijn vragen te stellen aan de bij uitstek deskundige sprekers.

Moge deze aanbeveling er toe bijdragen om vele leden op te wekken naar Utrecht te komen en te getuigen van hun actieve belangstelling voor ons mooie vak.

Namens het bestuur,

B. Groeneveld (voorz.)
J. F. Hufferman (secr.)

VOORLOPIGE AGENDA VAN DE ALGEMENE VERGADERING VAN WIMECOS op vrijdag 27 december 1963 in „Esplanade", Lucas Bolwerk, Utrecht. Aanvang 10.30.

1. Opening door de voorzitter dr. ir. B. Groeneveld.
2. Notulen van de algemene vergadering van 28 december 1962 (zie dit nummer).
3. Jaarverslagen:
   a. van de secretaris;
   b. van de penningmeester;
   c. van de kascommissie;
   d. van de redactie van „Euclides";
   e. van de commissie voor de leesportefeuille.

   Voor de verslagen onder a, c en e, zie dit nummer; onder d zie het volgend nummer.
4. Décharge van de penningmeester en benoeming van een nieuwe kascommissie.
5. Bestuursverkiezing wegens periodieke aftreding van de heren dr. ir. B. Groeneveld en drs. J. F. Hufferman.
   Het bestuur stelt beide aftredenden kandidaat.
6. a. Voorstel om het bestuur met één lid uit te breiden.
   b. Verkiezing van een nieuw bestuurslid.
   Het bestuur stelt kandidaat de heer drs. A. J. Th. Maassen te Arnhem.
7. Bespreking van de vraag, hoe het bezoek aan de jaarvergadering gestimuleerd kan worden.
8. Voordracht door de heer prof. dr. A. C. Zaanen, hoogleraar aan de Rijksuniversiteit te Leiden over: „De ontwikkeling van het integraalbegrip".
   PAUZE.
9. Korte voordracht door de heer dr. M. Euwe van de Stichting Studiecentrum voor Administratieve Automatisering te Amsterdam, over: „Programmering".
10. Korte voordracht door de heer dr. L. N. H. Bunt van het Pedagogisch Instituut van de Rijksuniversiteit te Utrecht, over: „Teaching Machines".
11. Rondvraag.
12. Sluiting.

N.B. Deze mededeling geldt tevens als voorlopige convocatie voor de leden van Wimecos. Deze kunnen tot uiterlijk 1 december a.s. nieuwe agendapunten voorstellen bij de secretaris, Charlotte de Bourbonlaan 64, Zeist.

NOTULEN van de ALGEMENE LEDENVERGADERING VAN WIMECOS op 28 december 1962 in „Esplanade" te Utrecht.

De voorzitter dr. ir. B. Groeneveld opent te 10.40 de vergadering. Hij heet de genodigden hartelijk welkom n.l. de inspecteurs Dr. D. N. van der Neut en drs. B. J. Westerhof; de afgevaardigden van de zusterverenigingen D. Leujes (Liwenagel), drs. H. C. Vernout wiskundewerkgroep) en drs. A. G. M. Oude Vrielink (Velebi); het erelid dr. Joh. H. Wansink; de redactiesecretaris van „Euclides" drs. A. M. Koldijk en de spreker in de ochtendvergadering prof. dr. J. de Groot.

Bericht van verhindering is binnengekomen van de heren mr. ir. M. Goote, inspecteur-generaal van het onderwijs, dr. J. A. A. Verlinden, chef van de hoofdafdeling V.H.M.O.; van de inspecteurs dr. H. A. Gribnau en dr. W. H. Capel; van de verzorger van de leesportefeuille de heer G. Boost; van de ereleden P. Wijdenes en A. J. S. van Dam en van het bestuurslid dr. P. G. J. Vredenduin.

Daar de openingsrede in „Euclides" zal worden opgenomen, kan met deze vermelding worden volstaan.

Inmiddels is nog het erelid prof. dr. O. Bottema binnengekomen, die nu door de voorzitter wordt welkom geheten. De vergadering besluit om aan de heer P. Wijdenes een telegram te zenden met gelukwensen i.v.m. zijn 90ste verjaardag op 22 december j.l.

Nadat een kleine wijziging in de notulen van de vorige jaarvergadering is aangebracht, worden deze goedgekeurd. Nadat de jaarverslagen goedgekeurd zijn, wordt de penningmeester décharge verleend en worden als leden van de nieuwe kascommissie aangewezen de leden A. H. F. Saeys en drs. H. C. Vernout.

Omdat geen tegenkandidaten zijn ingekomen worden de aftredende bestuursleden C. J. Alders en dr. P. G. J. Vredenduin herkozen verklaard. Hiermede is het huishoudelijk gedeelte van de vergadering afgelopen.

Prof. dr. J. de Groot krijgt nu het woord om zijn voordracht te houden over: Het vierkleurenprobleem. Deze boeiende en enthousiast gehouden voordracht wordt met grote belangstelling gevolgd. Er zal getracht worden een verslag ervan in „Euclides" te publiceren.

Te 12.45 schorst de voorzitter de vergadering tot 14.15.

Dan is het woord aan dr. J. Deknatel, die nu spreekt over: Wensen van de fysicus t.a.v. het wiskundeprogramma. Op deze voordracht volgt een prettige discussie.

Van de rondvraag maakt dr. D. N. van der Neut gebruik om mede namens drs. B. J. Westerhof te danken voor de uitnodiging om deze vergadering bij te wonen. Hij vraagt zich af, waarom niet meer leraren op deze jaarvergadering aanwezig zijn. Dit geldt vooral voor de jongeren onder hen.

Nadat ook drs. H. C. Vernout, mede namens de afgevaardigden van de andere verenigingen een woord van dank gesproken heeft, sluit de voorzitter te 16.30 de vergadering.

JAARVERSLAG over het VERENIGINGSJAAR 1 SEPTEMBER 1962—31 AUGUSTUS 1963.

De vereniging telde op 31 augustus 1963 663 leden, wat vergeleken bij de stand op 31 augustus 1962 een vooruitgang betekent van 128 leden. Deze vooruitgang is het resultaat van een gevoerde ledenwerfactie.

De algemene vergadering werd gehouden op 28 december 1962 in „Esplanade" te Utrecht en stond onder leiding van de nieuwe voorzitter, dr. ir. B. Groeneveld. Bij de bestuursverkiezing werden de aftredende bestuursleden C. J. Alders en dr. P. G. J. Vredenduin herkozen.

De voordrachten werden gehouden door prof. dr. J. de Groot (Amsterdam) en dr. J. Deknatel (Haarlem). De eerste sprak over „Het vierkleurenprobleem", de tweede over „Wensen van de fysicus t.a.v. het wiskundeprogramma".

Het bestuur overweegt maatregelen om het bezoek aan de jaarvergadering, vooral door de jongere leraren te stimuleren.

Op 26 en 27 augustus werd weer te Amsterdam de door het Mathematisch Centrum georganiseerde vakantiecursus gehouden (Wimecos is in de adviescommissie vertegenwoordigd). Het bezoek aan deze cursus was weer zeer bevredigend. In de verslagperiode vergaderde het bestuur driemaal. De verhouding tot de zusterorganisaties was goed.

VERSLAG VAN DE KASCOMMISSIE

Overveen, 18 september 1963

Aan de Ledenvergadering van de
Vereniging „WIMECOS"

Ondergetekenden, H. C. Vernout en A. H. F. Saeys, verklaren, dat zij op 18 september 1963 de boeken van de penningmeester Dhr. J. D. de Jong, hebben gecontroleerd en in volmaakte orde hebben bevonden.

Zij spreken hun grote waardering uit over de wijze waarop de financiën van „Wimecos" worden beheerd en stellen de vergadering voor de penningmeester décharge te verlenen over het in het afgelopen verenigingsjaar gevoerde beleid.

w.g. H. C. Vernout
A. H. F. Saeys

TIJDSCHRIFTEN-CIRCULATIE WIMECOS
1962—1963

Op dit ogenblik bedraagt het aantal lezers 38 (verleden jaar 37), die aan abonnementsgelden *f* 302,— betaalden, tegen *f* 340,— in het vorige jaar.

Het dubbele abonnement op Unterrichtsblätter is weer teruggebracht tot een enkel omdat 6 abonnees van de 21 een ander tijdschrift prefereerden.

De balans is dus: inkomsten *f* 302,—, uitgaven *f* 270,—, zodat nog steeds van een betrouwbare situatie mag worden gesproken, al is het niet gezond te noemen dat zoveel docenten juist in deze „vernieuwingstijd" zo weinig interesse blijken te hebben voor deze goede tijdschriftenverzameling.

Ondanks dit treden wij het jaar 1963—1964 wederom met goede hoop tegemoet.

w.g. G. J. J. Boost

BOEKBESPREKING

J. C. H. Gerretsen, *Lectures on tensor calculus and differential geometry*; P. Noordhoff N.V., Groningen, 1962; 202 bladz., *f* 25,—.

In dit mooie boek ontwikkelt de schrijver de moderne methoden van de differentiaalmeetkunde en past hij deze toe op de studie van krommen en hyperoppervlakken, welke in een lineaire ruimte met Euclidische metriek zijn ingebed. In de eerste drie hoofdstukken wordt een inleiding tot de theorie der lineaire vectorruimten gegeven; via de bilineaire vormen komt Prof. Gerretsen tot de multilineaire vormen of tensoren (hoofdstuk IV), die hun waardevolle diensten bij de opbouw van de differentiaalmeetkunde bewijzen.

Na deze inleidende hoofdstukken komt de differentiaalmeetkunde aan de orde. Zowel de theorie van de krommen als die van de hyperoppervlakken worden op elegante wijze ontwikkeld. De schrijver houdt zich daarbij steeds aan de methode om nieuwe begrippen of operatoren langs meetkundige weg en met behulp van vectoren in te voeren. Dit leidt tot concepties, die enerzijds het voordeel hebben van een grote mate van doorzichtigheid, terwijl anderzijds het algemeen maken van voorstellingen uit de drie-dimensionale, eventueel Euclidische ruimte, voor de lezer duidelijk wordt. Voorbeelden van de gevolgde methode kunnen op diverse plaatsen gevonden worden; hier zij slechts gewezen op de fraaie wijze waarop de geodetische afgeleide en de Christoffel-symbolen zijn ingevoerd (blz. 99 e.v.).

De behandeling van de meetkunde met behulp van vectorfuncties en tensoren heeft, behalve een elegante schrijfwijze van de formules en vergelijkingen, als voordeel dat de studie van krommen en hyperoppervlakken, in een n-dimensionale Euclidische ruimte ingebed, zonder complicaties mogelijk wordt. De schrijver grijpt, waar dit mogelijk is, de gelegenheid aan om te laten zien dat het drie-dimensionale geval in het algemene geval is opgesloten.

Natuurlijk speelt de theorie van de partiële differentiaalvergelijkingen in de differentiaalmeetkunde een belangrijke rol. In verband hiermee is het laatste hoofdstuk aan enkele problemen uit de theorie van de integreerbaarheid van partiële differentiaalvergelijkingen van de eerste orde gewijd.

De stijl van de auteur is helder, steeds recht op het doel af. De geleverde bewijzen zijn kort en duidelijk geformuleerd (slechts in paragraaf 6.2.6 vond recensent een onjuiste bewijsvoering, gevolg van fouten in de uitdrukkingen (6.2-41) en (6.2-42)). De toegevoegde lijst van corrigenda en addenda kan nog uitgebreid worden, hetgeen in een boek over differentiaalmeetkunde met zijn indices-rijke formules niet verwonderlijk is. Overigens is het een goede oefening voor de aandachtige lezer om de onbetekenende foutjes op te sporen. De typografische verzorging is uitstekend; het boek leest bijzonder prettig.

Het eindoordeel is: een aanwinst in de rij van Nederlandse standaardwerken op wiskundig gebied, waarmee zowel de schrijver als de studenten in de wiskunde (waartoe hopelijk een groot aantal docenten in de wiskunde bij het V.H.M.O. zich wil rekenen) gelukgewenst kunnen worden. Waar ook de moderne theoretische fysica

baat heeft bij een goed inzicht van zijn beoefenaren in differentiaalmeetkundige problemen, mag gehoopt en verwacht worden dat dit boek bij de opleiding van een groot aantal geïnteresseerden een belangrijke rol gaat spelen.

W. J. Claas.

Prof. dr. J. A. Sparenberg, *Over Techniek, Mechanica en Wiskunde*; rede uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van gewoon hoogleraar aan de Rijksuniversiteit te Groningen, J. B. Wolters, 1962, *f* 1,50.

Spreker behandelt in deze oratie de wisselwerking tussen de wiskunde enerzijds en de technische mechanica anderzijds. Aan de hand van enige voorbeelden wijst hij erop hoe beide partijen voordeel uit deze wisselwerking kunnen trekken.

Een voorbeeld, door spr. ontleend aan Uspensky, „Some applications of mechanics to mathematics", dat bijzonder aardig is voor het V.H.M.O., wil ik hier overnemen.

„Als illustratief voorbeeld kan genoemd worden het bewijs dat de raaklijn van een ellips gelijke hoeken maakt met de twee stralen die naar het bijbehorende raakpunt gaan. Deze stelling is geheel onverwacht mechanisch direct aanschouwelijk. Men gaat n.l. van de bekende constructie uit van de ellips door middel van twee punaises (dit zijn de brandpunten) en een touwtje. Het vlak van tekening wordt verticaal gezet, waarbij de twee brandpunten niet op een horizontale lijn behoeven te liggen. Hangt men nu een gewicht door middel van een katrol aan het touwtje, dat de twee brandpunten verbindt, dan zoekt dit de laagste stand op. Dit betekent dat in dat punt de raaklijn horizontaal is, want beweegt men de katrol even naar links of naar rechts, dan moet het gewicht stijgen. Doch daar de spanning in de touwtjes gelijk is, maken de touwtjes (dit zijn de voerstralen) gelijke hoeken met de horizontaal en dit was juist, zoals we zagen, een willekeurige raaklijn."

Een bezwaar heb ik tegen het gebruik van het woord „mathemaat" en vooral tegen de combinatie „zuivere mathemaat".

J. F. Hufferman.

Clifford Bell, Clela D. Hammond and Robert B. Herrera, *Fundamentals of arithmetic for teachers*, 389 blz., gebonden, 1962; John Wiley and Sons, New-York—London.

Dit boek behandelt de aspecten van de wiskunde die voor de onderwijzer van de lagere school van belang kunnen worden geacht over het algemeen breder en dieper en op modernere wijze dan we in ons land gewend zijn. Men heeft het boek te zien als een voor dit doel zo breed mogelijk opgezette rekenkunde.

De gegeven opbouw der rekenkunde is gebaseerd op de verzamelingsleer. In de inleiding tot de algebra staan de vergelijkingen centraal (sets, solution sets, equations), terwijl aan het einde ook een axiomatische fundering van getallenlichamen wordt gegeven. De inleiding tot de meetkunde blijft op intuïtief niveau.

Docenten aan kweekscholen kunnen in dit boek aanleiding vinden om de opleiding wat de wiskunde betreft hier te vergelijken met de opleiding ginds. Voor hen bevat het boek tal van interessante details.

Over het wiskundig inzicht dat bij gebruik van een boek als dit kan worden bereikt, make men zich echter geen illusies. Zo wordt het kenmerk van deelbaarheid voor 9 gegeven in de vorm: a number is divisible by 9 if the sum of the digits is divisible by 9" (p. 116), terwijl blijkens de toepassingen het hier gegeven „voldoende kenmerk" zonder meer als een „nodig en voldoende kenmerk" wordt be-

schouwd. Node missen we dus de bedoelde ekwivalentie, b.v. in de vorm van een „if and only if”.

Op p. 121 wordt de algoritme van Euclides voor de bepaling van de grootste gemene deler van twee getallen door enige voorbeelden toegelicht, maar de behandeling stijgt niet boven het technische niveau uit. Een bewijs ontbreekt.

Door feilen als deze blijft het verkrijgen van wiskundig inzicht illusoir.

Joh. H. Wansink.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (liefst persklaar) en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

98. Hoe kan elk natuurlijk getal geschreven worden met behulp van drie cijfers 2 en wiskundige tekens?

99. Men beschouwt de natuurlijke getallen, die (in het tientallig stelsel) geschreven worden met tien verschillende cijfers; het eerste cijfer mag geen 0 zijn. Men rangschikt deze getallen naar hun grootte. Wat is het grootste verschil van twee opvolgende getallen? (Dr. J. H. van Lint)

100. Twee legpuzzels zijn in hun geheel congruent. Ze bestaan elk uit n delen, die alle een even grote oppervlakte hebben. We leggen de puzzels op elkaar. Is het nu mogelijk door middel van n spijkertjes de n stukken van de bovenste puzzel aan die van de onderste vast te spijkeren? (Drs. R. Sattler)

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

96. De verplaatsing kan in twee richtingen gebeuren. We noemen deze de richting vooruit en achteruit. De som van de verplaatsingen vooruit is gelijk aan de som van de verplaatsingen achteruit, dus aan 150 m. Deze som is maximaal, als bij even aantal n de eerste $\frac{1}{2}n$ bomen op de plaats van de laatste gezet worden, en bij oneven aantal de eerste $\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$. Dit geeft resp.

$$\tfrac{1}{2}n \cdot \tfrac{1}{2}n \cdot 5 = 150 \quad \text{en} \quad (\tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{2}) \cdot (\tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{2}) \cdot 5 = 150.$$

Dus $n = 11$.

Misschien merkt men op, dat nu de middelste (zesde) boom op zijn plaats is gebleven. Dit hoeft echter niet, want men kan bij het vooruit verplaatsen b.v. boom nr. 1 op de plaats zetten van 7, 2 op 8, 3 op 9, 4 op 10, 5 op 6 en 6 op 11.

97. In $S_n = k \cdot (7n + 1)$ en $s_n = k \cdot (4n + 27)$ hangt k van n af; er geldt namelijk $k = k_1 n$.

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien zij binnen drie dagen na verschijnen van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, De Houtmanstraat 37, Hoogezand.

MATHEMATISCH CENTRUM

In de serie „*Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht*” in het MC, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam op woensdag 27 november 1963:
Prof. Dr. P. Mullender: „Eenvoudige waarheden”. Aanvang 20.00 uur.

In de serie „*Actualiteiten*” in Hotel Krasnapolsky, Warmoesstraat 173—179, Amsterdam (ingang kleine zaal) op zaterdag 30 november 1963:
Drs. F. J. M. Barning: „Pythagorese driehoeken”. Aanvang 14.00 uur.